รหัส 3000-1525 วิชา แคลคูลัส 1

คำสั่ง จงศึกษาตัวอย่างและสร้างแบบฝึกหัดเลียนแบบตัวอย่างด้วยลายมือ ตัวอย่างละ 2 ข้อ รวมทั้งหมดให้ได้ 100ข้อ ส่งครูติ๊ดในสัปดาห์สุดท้าย

การหาค่าของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x}$ จงหา f(5) - f(2)

วิธีทำ $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x}$

$$f(5) = \frac{5^3 - 1}{5} = \frac{124}{5}$$

$$f(2) = \frac{2^3 - 1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore\ f(5) - f(2) = \frac{124}{5} - \frac{7}{2} = \frac{213}{10}$$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ จงหา f(-2) . f(2)

วิธีทำ $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

$$f(-2) = \sqrt{(-2)^2 - 3} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1}$$

$$f(2) = \sqrt{2^2 - 3} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1}$$

$$f(-2)\,.\,f(2) = \sqrt{1}\,.\sqrt{1} = 1$$ ***ตอบ***

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3 $\lim\limits_{x \to 1}(5-9x) = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 1}(5-9x) = 5-9(1) = -4$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4 $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - x - 7) = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - x - 7) = 3^2 - 3 - 7 = -1$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 5 $\lim\limits_{x \to -1}(3x+10) = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to -1}(3x+10) = 3(-1)+10$

$$= -3+10 = 7$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> $\lim\limits_{x \to 5}\left[(x+5)(3x-4)\right] = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 5}\left[(x+5)(3x-4)\right] = \left[(5+5)(3(5)-4)\right]$

$= (10)(11)$

$= 110$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{5x^2-3}{-x^2+1} = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{5x^2-3}{-x^2+3} = \dfrac{5(2^2)-3}{(-2)^2+3}$

$= \dfrac{20-3}{-4+3} = -\dfrac{17}{3}$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> $\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2-4x\right) = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2-4x\right) = 2^2-4\left(2\right) = 4-8 = -4$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> $\lim\limits_{x \to -1}\left(x^3+2x^2-3x-4\right) = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to -1}\left(x^3+2x^2-3x-4\right) = \left(-1\right)^3+2\left(-1\right)^2-3\left(-1\right)-4$

$= -1+2+3-4 = 0$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\left(3x-1\right)^2}{\left(x+1\right)^3} = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\left(3x-1\right)^2}{\left(x+1\right)^3} = \dfrac{\left(3\left(1\right)-1\right)^2}{\left(1+1\right)^3} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}\right) = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x-3^{-x}}\right) = \dfrac{3^0-3^0}{3^0+3^0} = \dfrac{1-1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$ **<u>ตอบ</u>**

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2x+3}{4x-5} = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2x+3}{4x-5} = \lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\dfrac{2x}{x}+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{4x}{x}-\dfrac{5}{x}}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{4 - \frac{5}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 4 - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x}}$$

$$= \frac{2+0}{4-0} \qquad = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 13 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^2 - 2}{3x^2 + 10x - 100} = ?$

วิธีทำ $$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 2}{3x^2 + 10x - 100} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{7x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{10x}{x^2} - \frac{100}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{7 - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{10}{x} - \frac{100}{x^2}}$$

$$= \frac{7-0}{3+0-0} = \frac{7}{3}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 14 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ $$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2}{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{2}{0+0} \qquad = \frac{2}{0} \qquad = \infty$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 15 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{x^2-4} = ?$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

$= \dfrac{0}{1-0} = \dfrac{0}{1} = 0$ **ตอบ**

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 16 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = 2x^2 - x + 1$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = -2$ หรือไม่

วิธีทำ $\because f(x) = 2x^2 - x + 1$

หาค่า $f(-2)$

$\because f(2) = 2(-2)^2 - (-2) + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$

หาค่า $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

$$\because \lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (2x^2 - x + 1)$$
$$= 2(-2)^2 - (2) + 1$$
$$= 8 + 2 + 1$$
$$= 11$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 11$

ดังนั้น $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = -2$ เพราะมีสมบัติครบทั้งสามข้อ **ตอบ**

การหาค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 17 ถ้า y = 10 จงหาค่าอนุพันธ์ของ y

วิธีทำ y = 10

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d10}{dx} = 0$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 18 ถ้า y = -2x

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(-2x) = -2\dfrac{d}{dx}x = -2$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 19 ถ้า $y = x^6$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}x^6 = 6x^{6-1}\dfrac{dx}{dx} = 6x^5\dfrac{dx}{dx} = 6x^5$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 20 ถ้า $y = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 10$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(4x^3 - 5x^2 + 7x - 10\right)$$

$$= \frac{d\left(4x^3\right)}{dx} - \frac{d\left(5x^2\right)}{dx} + \frac{d7x}{dx} - \frac{d10}{dx}$$

$$= 4\frac{dx^3}{dx} - 5\frac{dx^2}{dx} + 7 - 0$$

$$= 4\left(2x^{3-1}\frac{dx}{dx}\right) - 5\left(2x^{2-1}\frac{dx}{dx}\right) + 7$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2 - 10x + 7$$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 21 ถ้า $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$

จะได้ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^5) + 5\frac{d}{dx}(x^4) - 10\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d(6)}{dx}$$

$$= 5x^{5-1} + 5(4)x^{4-1} - 10(2)x^{2-1} + 0$$

$$= 5x^4 + 20x^3 - 20x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 22 ถ้า $y = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{-1}{2}}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{-1}{2}}$

จะได้ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{-1}{2}})$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}}) + 2\frac{d}{dx}(x^{\frac{-1}{2}})$$

$$= 3(\frac{1}{2})x^{\frac{-1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2(\frac{-1}{2})x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{-3}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 23 ถ้า $y=\sqrt{2x}+2\sqrt{x}$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y=\sqrt{2x}+2\sqrt{x}$

หรือ $y=(2x)^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[(2x)^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]$

$$=\frac{d}{dx}(2x)^{\frac{1}{2}}+2\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{1}{2}(2x)^{\frac{-1}{2}}\frac{d}{dx}(2x)+2(\frac{1}{2})x^{\frac{-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(2x)^{\frac{-1}{2}}2\frac{dx}{dx}+x^{\frac{-1}{2}}$$

$$=(2x)^{\frac{-1}{2}}(1)+x^{\frac{-1}{2}} \quad =\frac{1}{\sqrt{2x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 24 ถ้า $y=(1-5x)^6$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y=(1-5x)^6$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(1-5x)^6$

$$=6(1-5x)^5\frac{d}{dx}(1-5x)$$

$$=6(1-5x)^5\left[\frac{d(1)}{dx}-5\frac{dx}{dx}\right]$$

$$=6(1-5x)^5(0-5(1))$$

$$=6(-5)(1-5x)^5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-30(1-5x)^5$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 25 ถ้า $y=\sqrt{3+4x-x^2}$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y=\sqrt{3+4x-x^2}=(3+4x-x^2)^{\frac{1}{2}}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3+4x-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{2}(3+4x-x^2)^{\frac{-1}{2}}\frac{d}{dx}(3+4x-x^2)$$

$$=\frac{1}{2}(3+4x-x^2)^{\frac{-1}{2}}\left[\frac{d(3)}{dx}+4\frac{dx}{dx}-\frac{d(x^2)}{dx}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(3+4x-x^2)^{\frac{-1}{2}}(0+4(1)-2x)$$

$$= \frac{1}{2}(3+4x-x^2)^{\frac{-1}{2}}(4-2x)$$

$$= \frac{1}{2}2(2-x)(3+4x-x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{2-x}{(3+4x-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2-x}{\sqrt{3+4x-x^2}} = \frac{2-x}{y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 26 ถ้า $\theta = \dfrac{3r+2}{2r+3}$ จงหา $\dfrac{d\theta}{dr}$

วิธีทำ จาก $\theta = \dfrac{3r+2}{2r+3}$

จะได้ $$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{3r+2}{2r+3}\right]$$

$$= \frac{(2r+3)\frac{d}{dr}(3r+2)-(3r+2)\frac{d}{dr}(2r+3)}{(2r+3)^2}$$

$$= \frac{(2r+3)\left[3\frac{dr}{dr}+\frac{d(2)}{dr}\right]-(3r+2)\left[2\frac{dr}{dr}+\frac{d3}{dr}\right]}{(2r+3)^2}$$

$$= \frac{(2r+3)(3(1)+0)-(3r+2)(2(1)+0)}{(2r+3)^2}$$

$$= \frac{3(2r+3)-2(3r+2)}{(2r+3)^2}$$

$$= \frac{6r+9-6r-4}{(2r+3)^2} = \frac{5}{(2r+3)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{5}{(2r+3)^2}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 27 กำหนดให้ $y=(x^2+4)^2(2x^3-1)^3$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y=(x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x^2+4)^2(2x^3-1)^3\right]$$

$$= (x^2+4)^2\frac{d}{dx}(2x^3-1)^3+(2x^3-1)^3\frac{d}{dx}(x^2+4)^2$$

$$= (x^2+4)^2 3(2x^3-1)^2\frac{d}{dx}(2x^3-1)+(2x^3-1)^3 2(x^2+4)\frac{d}{dx}\left(x^2+4\right)$$

$$= 3(x^2+4)^2(2x^3-1)^2\left[2\frac{d(x^3)}{dx}-\frac{d(1)}{dx}\right]+(2x^3-1)^3 2(x^2+4)\left[\frac{d(x^2)}{dx}+\frac{d(4)}{dx}\right]$$

$$= 3(x^2+4)^2(2x^3-1)^2(6x^2-0)+2(2x^3-1)^3(x^2+4)(2x+0)$$

$$= 18x^2(x^2+4)^2(2x^3-1)^2+4x(2x^3-1)^3(x^2+4)$$

$$= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2\left\{9x(x^2+4)+2(2x^3-1)\right\}$$
$$= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(9x^3+36x+4x^3-2)$$
$$\therefore y' = 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+36x-2)$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 28</u> $f(x)=x^3-4x+1$ จงหา $f'(-1)$

วิธีทำ ต้องการหาค่า $f'(-1)$ จาก $f(x)=x^3-4x+1$

เพราะว่า $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^3-4x+1)$

$$= \frac{d}{dx}(x^3)4-\frac{dx}{dx}+\frac{d(1)}{dx}$$
$$= 3x^2-4(1)+0$$
$$\therefore f'(x) = 3x^2-4$$

แทนค่า $x=-1$ ลงใน $f'(x)$ จะได้ $f'(-1)=3(-1)^2-4=3-4=-1$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 29</u> ถ้า $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{t}}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{t}}$ จงหา $f'(t)$

วิธีทำ จาก $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{t}}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{t}}=2t^{\frac{-1}{2}}+6t^{\frac{-1}{3}}$

จะได้ $f'(t) = \dfrac{d}{dt}\left[2t^{\frac{-1}{2}}+6t^{\frac{-1}{3}}\right]$

$$= 2\frac{d}{dt}(t^{\frac{-1}{2}})+6\frac{d}{dt}(t^{\frac{-1}{3}})$$
$$= 2(\frac{-1}{2})t^{\frac{-3}{2}}+6(\frac{-1}{3})t^{\frac{-4}{3}}$$
$$= -t^{\frac{-3}{2}}-2t^{\frac{-4}{3}}$$
$$= -t^{-2}(t^{\frac{1}{2}}+2t^{\frac{2}{3}})$$
$$\therefore f'(t) = \frac{-(t^{\frac{1}{2}}+2t^{\frac{2}{3}})}{t^2}$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 30</u> กำหนดให้ $y=\left[\dfrac{x}{1+x}\right]^5$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y=\left[\dfrac{x}{1+x}\right]^5$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x}{1+x}\right]^5$

$$= 5\left[\frac{x}{1+x}\right]^4\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+x}\right]$$

$$= 5\left[\frac{x}{1+x}\right]^4 \left\{ \frac{(1+x)\frac{dx}{dx} - x\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2} \right\}$$

$$= \frac{5x^4}{(1+x)^4} \left\{ \frac{(1+x)(1) - x\left[\frac{d(1)}{dx} + \frac{dx}{dx}\right]}{(1+x)^2} \right\}$$

$$= \frac{5x^4}{(1+x)^4} \left\{ \frac{(1+x) - x(0+1)}{(1+x)^2} \right\}$$

$$= \frac{5x^4}{(1+x)^4} \left\{ \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 31</u> ถ้า $y = \left(x^2+3\right)^4 \left(2x^3-5\right)^3$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = \left(x^2+3\right)^4 \left(2x^3-5\right)^3$

จะได้

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x^2+3\right)^4 \left(2x^3-5\right)^3$$

$$= \left(x^2+3\right)^4 \frac{d}{dx}\left(2x^3-5\right)^3 + \left(2x^3-5\right)^3 \frac{d}{dx}\left(x^2+3\right)^4$$

$$= \left(x^2+3\right)^4 3\left(2x^3-5\right)^2 6x^2 + \left(2x^3-5\right)^3 4\left(x^2+3\right)^3 2x$$

$$= 18x^2\left(x^2+3\right)^4\left(2x^3-5\right)^2 + 8x\left(2x^3-5\right)^3\left(x^2+3\right)^3$$

$$= 2x\left(x^2+3\right)^3\left(2x^3-5\right)^2\left\{9x\left(x^2+3\right) + 4\left(2x^3-5\right)\right\}$$

$$= 2x\left(x^2+3\right)^3\left(2x^3-5\right)^2\left\{18x^3+27x+8x^3-20\right\}$$

$$= 2x\left(x^2+3\right)^3\left(2x^3-5\right)^2\left(26x^3+27x-20\right)$$

ตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 32</u> ถ้า $f(x) = \left(3x-x^3+1\right)^4$

วิธีทำ จาก $f(x) = \left(3x-x^3+1\right)^4$ จะได้

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x-x^3+1\right)^4$$

$$= 4\left(3x-x^3+1\right)^3\left(3-3x^2\right)$$

$$= 12\left(1-x^2\right)\left(3x-x^3+1\right)^3$$

ตัวอย่างที่ 33 ถ้า $y=\left(\dfrac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y=\left(\dfrac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$

จะได้ $y'=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$

$$=4\left[\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right]^3\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)$$

$$=4\left[\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right]^3\frac{\left(2x^3+1\right)3x^2-\left(x^3-1\right)6x^2}{\left(2x^3+1\right)^2}$$

$$=4\left[\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right]^3\left\{\frac{6x^5+3x^2-6x^5+6x^2}{\left(2x^3+1\right)^3}\right\}$$

$$=\frac{36x^2\left(x^3-1\right)^3}{\left(2x^3+1\right)^6}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 34 ถ้า $s=\dfrac{t^2+2}{3-t^2}$ จงหา $s'(t)$

วิธีทำ จาก $s=\dfrac{t^2+2}{3-t^2}$

จะได้ $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{t^2+2}{3-t^2}\right)$

$$=\frac{\left(3-t^2\right)\frac{d}{dt}\left(t^2+2\right)-\left(t^2+2\right)\frac{d}{dt}\left(3-t^2\right)}{\left(3-t^2\right)^2}$$

$$=\frac{2t\left(3-t^2\right)+2t\left(t^2+2\right)}{\left(3-t^2\right)^2}$$

$$=\frac{6t-2t^3+2t^3+4t}{\left(3-t^2\right)^2}$$

$$=\frac{10t}{\left(3-t^2\right)^2}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 35 ถ้า y = (4x)(x + 1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x)(x+1)$$

$= 4x\frac{d}{dx}(x+1)+(x+1)\frac{d}{dx}4x$

$= 4x(1)+(x+1)4$

$= 4x+4x+4$

$= 8x+4$ ***ตอบ***

<u>ตัวอย่างที่ 36</u> ถ้า $y = (x^2-1)(3x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2-1)(3x)$

$= \left(x^2-1\right)\frac{d}{dx}(3x)+(3x)\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)$

$= (x^2-1)(3)+(3x)(2x)$

$= 3x^2-3+6x^2 = 9x^2-3$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 37</u> ถ้า $y = \frac{(3x-1)}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{(3x-1)}{x}$

$= \frac{1}{x^2}\left[x\frac{d}{dx}(3x-1)-(3x-1)\frac{d}{dx}x\right]$

$= \frac{1}{x^2}[x(3)-(3x-1)(1)]$

$= \frac{1}{x^2}[3x-3x+1] = \frac{1}{x^2}$ ***ตอบ***

<u>ตัวอย่างที่ 38</u> ถ้า $y = \frac{3x-5}{x^2+2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{3x-5}{x^2+2}$

$= \frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}\left[\left(x^2+2\right)\frac{d}{dx}(3x-5)-(3x-5)\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)\right]$

$= \frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}[(x^2+2)(3)-(3x-5)(2x)]$

$= \frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}[3x^2+6-6x^2+10x)]$

$= \frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}[-3x^2+16x)]$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 39 ถ้า $y = (2x)^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x)^4$$

$$= 4(2x)^{4-1}\frac{d}{dx}(2x) = 8(2x)^3$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 40 ถ้า $y = (x-8)^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x-8)^{-2} = -2(x-8)^{-2-1}\frac{d}{dx}(x-8)$$

$$= -2(x-8)^{-3}\frac{d}{dx}(x-8)$$

$$= -2(x-8)^{-3}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dx}-\frac{d8}{dx}\right)$$

$$= -2(x-8)^{-3}$$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 41 ถ้า $y = \sqrt[3]{x^2+4x-1}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $y = \sqrt[3]{x^2+4x-1}$

$$y = \left(x^2+4x-1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2+4x-1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+4x-1\right)^{\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dx}\left(x^2+4x-1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+4x-1\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{dx^2}{dx}+\frac{d4x}{dx}-\frac{d1}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{3\left(x^2+4x-1\right)^{\frac{2}{3}}}\left(2x\frac{dx}{dx}+4\frac{dx}{dx}-0\right)$$

$$= \frac{(2x-4)}{3\left(x^2+4x-1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x^2+4x-1)^2}}$$ **ตอบ**

กฎลูกโซ่ (chain Rule)

ตัวอย่างที่ 42 ถ้า $y = u^2 + 4$ และ $u^2 = x^2 + 2x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = u^2 + 4$

จะได้ $\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^2+4)$

$= \frac{d}{du}(u^2) + \frac{d}{du}(4)$

$\therefore \frac{dy}{du} = 2u$

จาก $u = x^2 + 2x$

จะได้ $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+2x)$

$= \frac{d}{dx}(x^2) + 2\frac{dx}{dx}$

$\therefore \frac{du}{dx} = 2x+2$

โดย chain Rule จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$= (2u)(2x+2) = 2(x^2+2x)(2x+2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x(x+2)(x+1)$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 43 ถ้า $y = u^2 - 3u$ และ $u = 3x^2 + 2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

จากสูตร $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$= \frac{d}{du}\left(u^2 - 3u\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 2\right)$

$= \left(\frac{du^2}{du} - \frac{d3u}{du}\right)\left(\frac{d3x^2}{dx} - \frac{d2}{dx}\right)$

$= \left(2u\frac{du}{du} - 3\frac{du}{du}\right)\left(3\frac{dx^2}{dx} - 0\right)$

$= \left(2u - 3\right)\left(3\left(2x\frac{dx}{dx}\right)\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (2u-3)(6x) \quad \text{แต่} \quad u = 3x^2+2$$
$$= (2(3x^2+2)-3)(6x)$$
$$= (6x^2+4-3)(6x)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x(6x^2+1)$$ ***ตอบ***

<u>ตัวอย่างที่44</u> ให้ $y = 3u^2 + 2u + 5$, $u = 4v - 1$, $v = 3x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3u^2+2u+5)\cdot\frac{d}{dv}(4v-1)\cdot\frac{d}{dx}(3x^2)$$
$$= \left(\frac{d}{du}(3u^2)-\frac{d}{du}2u+\frac{d5}{du}\right)\left(\frac{d4v}{dv}-\frac{d1}{dv}\right)\left(\frac{3dx^2}{dx}\right)$$
$$= \left(3\left(2u\frac{du}{du}\right)-2\right)\left(4\frac{dv}{dv}-0\right)(6x)$$
$$= (6u-2)(4)(6x) \quad \text{แต่} \quad u = 4v - 1$$
$$= (6(4v-1)-2)(24x)$$
$$= (24v-6-2)(24x) \quad \text{แต่} \quad v = 3x^2$$
$$= (24(3x^2)-8)(24x)$$
$$= (72x^2-8)(24x)$$
$$= 8(9x^2-1)(24x)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = (9x^2-1)(192x)$$ ***ตอบ***

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

<u>ตัวอย่างที่45</u> กำหนดให้ $x^2+2y^3 = x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{dx}{dy}$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{d}{dx}(x^2+2y^3) = \frac{dx}{dx}$$
$$\frac{dx^2}{dx}+\frac{d2y^3}{dx} = 1$$
$$2x\frac{dx}{dx}+2\left(3y^{3-1}\frac{dy}{dx}\right) = 1$$

$$2x+6y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{6y^2}$$

ในทำนองเดียวกัน จากโจทย์ $x^2+2y^3 = x$

หาอนุพันธ์เทียบกับ y ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{d}{dy}(x^2+2y^3) = \frac{dx}{dy}$$

$$\therefore \frac{dx^2}{dy}+\frac{d2y^3}{dy} = \frac{dx}{dy}$$

$$2\frac{dx}{dy}+2\left(3y^{3-1}\frac{dy}{dy}\right) = \frac{dx}{dy}$$

$$2\frac{dx}{dy}-6y^2 = \frac{dx}{dy}$$

$$2\frac{dx}{dy}-\frac{dx}{dy} = 6y^2$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = 6y^2$$ ***ตอบ***

การหาอนุพันธ์อันดับสูง

<u>ตัวอย่างที่46</u> กำหนดให้ $y = 2x^5+4x^4-2x^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ และ $\frac{d^5y}{dx^5}$

จาก $y = 2x^5+4x^4-2x^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}2x^5+\frac{d}{dx}4x^4-\frac{d}{dx}2x^3$$

$$= 10x^4+16x^3-6x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(10x^4+16x^3-6x^2\right)$$

$$= \frac{d}{dx}10x^4+\frac{d}{dx}16x^3-\frac{d}{dx}6x^2$$

$$= 40x^3+48x^2-12x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(40x^3+48x^2-12x\right)$$

$$= \frac{d}{dx}40x^3+\frac{d}{dx}48x^2-\frac{d}{dx}12x$$

$$= 120x^2 + 96x - 12$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(120x^2 + 96x - 12\right)$$

$$= \frac{d}{dx}120x^2 + \frac{d}{dx}96x - \frac{d12}{dx}$$

$$= 240x + 96$$

และ $$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}(240x + 96)$$

$$= \frac{d}{dx}240x + \frac{d96}{dx}$$

$$= 240$$ ***ตอบ***

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย

<u>ตัวอย่างที่ 47</u> กำหนดให้ $y = \cos 5x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> $y = \cos 5x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos 5x$$

$$= -\sin 5x \frac{d5x}{dx}$$

$$= -\sin 5x \left(5\frac{dx}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -5\sin 5x$$ ***ตอบ***

<u>ตัวอย่างที่ 48</u> กำหนดให้ $y = \tan(2x+5)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> $y = \tan(2x+5)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan(2x+5)$$

$$= \sec^2(2x+5)\frac{d}{dx}(2x+5)$$

$$= \sec^2(2x+5)\left(\frac{d}{dx}(2x+5)\right)$$

$$= 2\sec^2(2x+5)$$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 49 กำหนดให้ $y = \sin 8x - \cos 5x + \tan 4x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sin 8x - \cos 5x + \tan 4x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin 8x - \cos 5x + \tan 4x)$$

$$= \frac{d}{dx}\sin 8x - \frac{d}{dx}\cos 5x + \frac{d}{dx}\tan 4x$$

$$= \cos 8x\frac{d8x}{dx} + \sin 5x\frac{d5x}{dx} + \sec^2 4x\frac{d4x}{dx}$$

$$= 8\cos 8x + 5\sin 5x + 4\sec^2 4x$$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 50 กำหนดให้ $y = \sqrt{\sin(x^2+5)}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{\sin(x^2+5)}$

$$= \left[\sin(x^2+5)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\sin(x^2+5)\right]^{\frac{1}{2}-1}\frac{dy}{dx}\sin(x^2+5)$$

$$= \frac{1}{2(\sin(x^2+5))^{\frac{1}{2}}}\cdot\left[\sin(x^2+5)\frac{d}{dx}(x^2+5)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\sin(x^2+5)}\,(x+2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+2}{2}\right)\sqrt{\sin(x^2+5)}$$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 51 กำหนดให้ $y = \tan^2\sqrt{2x-10}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \tan^2\sqrt{2x-10}$

จะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^2(2x-10)^{\frac{1}{2}}$

$$= 2\tan^{2-1}(2x-10)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\tan(2x-10)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\tan(2x-10)^{\frac{1}{2}}.\sec^2(2x-10)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}(2x-10)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(2x-10)$$

$$= 2\tan(2x-10)^{\frac{1}{2}}.\sec^2(2x-10)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}(2x-10)^{\frac{1}{2}-1}(2)$$

$$= 2\tan(2x-10)^{\frac{1}{2}}.\sec^2(2x-10)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{(2x-10)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{2x-10}.2\tan\sqrt{2x-10}.\sec^2\sqrt{2x-10}$$ ***ตอบ***

<u>ตัวอย่างที่ 52</u> กำหนดให้ $\sin y + \cos x = 7$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\sin y + \cos x = 7$ หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(\sin y + \cos x) = \frac{d7}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sin y + \frac{d}{dx}\cos x = 0$$

$$\cos y\frac{dy}{dx} - \sin x\frac{dx}{dx} = 0$$

$$\cos y\frac{dy}{dx} - \sin x = 0$$

$$\cos y\frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos y}$$ ***ตอบ***

<u>ตัวอย่างที่ 53</u> กำหนดให้ $y = \arctan\left(\frac{3}{x}\right)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $y = \arctan\frac{3}{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\arctan\frac{3}{x}$$

$$= \frac{1}{1+(\frac{3}{x})^2}.\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{9}{x^2}}.\left(3\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{3}{\frac{x^2+9}{x^2}}\left(\frac{-1}{x^2}\frac{dx}{dx}\right)$$

$$= \frac{3x^2}{x^2+9}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x^2+9}$$ ***ตอบ***

<u>ตัวอย่างที่ 54</u> กำหนดให้ $y = \text{arcsec}\,(2x+1)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $y = \text{arcsec}\,(2x+1)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,\text{arcsec}\,(2x+1)$$

$$= \frac{1}{(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2-1}}\frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$= \frac{1}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x+1-1}}\left(\frac{d}{dx}2x+\frac{d1}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{(2x+1)\sqrt{4(x^2+x)}}\left(2\frac{dx}{dx}+0\right)$$

$$= \frac{2}{(2x+1)2\sqrt{x^2+x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$$ ***ตอบ***

<u>ตัวอย่างที่ 55</u> กำหนดให้ $y = \text{arcsec}\,(x+7) + \text{arccosec}\,(x+7)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $y = \text{arcsec}\,(x+7) + \text{arccosec}\,(x+7)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,\text{arcsec}\,(x+7) + \frac{d}{dx}\,\text{arccosec}\,(x+7)$$

$$= \frac{1}{(x+7)\sqrt{(x+7)^2-1}}\frac{d}{dx}(x+7) + \frac{-1}{(x+7)\sqrt{(x+7)^2-1}}\frac{d}{dx}(x+7)$$

$$= \frac{1}{(x+7)\sqrt{(x+7)^2-1}} - \frac{1}{(x+7)\sqrt{(x+7)^2-1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$ ***ตอบ***

<u>ตัวอย่างที่ 56</u> กำหนดให้ $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \frac{1}{2}\text{arcsec}\,\frac{x}{2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \frac{1}{2}\text{arcsec}\,\frac{x}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \frac{1}{2}\text{arcsec}\,\frac{x}{2}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\text{arcsec}\,\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(x^2)^2}\left[x^2\frac{d}{dx}(x^2-4)^{\frac{1}{2}} - (x^2-4)^{\frac{1}{2}}\frac{dx^2}{dx}\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\,\text{arcsec}\,\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{x^4}\left[x^2 \frac{1}{2(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}\frac{d}{dx}(x^2-4) - (x^2-4)^{\frac{1}{2}}(2x\frac{dx}{dx})\right] +$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{\frac{x}{2}\sqrt{(\frac{x}{2})^2-1}}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^4}\left[\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}\left(\frac{dx^2}{dx} - \frac{d4}{dx}\right) - 2x\sqrt{x^2-4}\ \right] +$$

$$\frac{1}{x\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}\left(\frac{1}{2}\ \frac{dx}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{x^4}\left[\frac{x^2(2x)}{2\sqrt{x^2-4}} - 2x\sqrt{x^2-4}\ \right] + \frac{1}{x\sqrt{\frac{x^2-4}{4}}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{2x}{x^4}\left[\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{x^2-4}\ \right] + \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{2x}{x^4}\left[\frac{x^2-2(\sqrt{x^2-4})^2}{2\sqrt{x^2-4}}\right] + \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{1}{x^3}\left[\frac{x^2-2(x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}}\right] + \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(\frac{8-2x^2+x^2}{\sqrt{x^2-4}}\right) + \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{8-x^2}{x^3\sqrt{x^2-4}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{8-x^2+x^2}{x^3\sqrt{x^2-4}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{8}{x^3\sqrt{x^2-4}}$$

ตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 57</u> กำหนดให้ $y = 4\tan 5x$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = 4\tan 5x$

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}(\tan 5x)$$

$$= 4\sec^2 5x\frac{d}{dx}(5x)$$

$$= 4\sec^2 5x.5\frac{dx}{dx}$$

$$= 20sec^2 5x(1)$$

$$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = 20\sec^2 5x$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 58</u> กำหนดให้ $y = \frac{1}{4}\csc 4x$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = \frac{1}{4}csc4x$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\csc 4x)$

$$= \frac{1}{4}\frac{d}{dx}(\csc 4x)$$

$$= \frac{1}{4}(\csc 4x)(\cot 4x)\frac{d}{dx}(4x)$$

$$= \frac{-1}{4}\csc 4x\cot 4x4\frac{dx}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\csc 4x\cot 4x$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 59</u> กำหนดให้ $y = \sin x - x\cos x + x^2 + 4x + 3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sin x - x\cos x + x^2 + 4x + 3$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) - \frac{d}{dx}(x\cos x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(3)$

$$= \cos x\frac{dx}{dx} - \left\{x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{dx}{dx}\right\} + 2x + 4\frac{dx}{dx} + 0$$

$$= \cos x - \left\{x(-\sin x)\frac{dx}{dx} + \cos x(1)\right\} + 2x + 4(1)$$

$$= \cos x + x\sin x - \cos x + 2x + 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x\sin x + 2x + 4$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 60</u> กำหนดให้ $y = \sin^2(3x-2)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sin^2(3x-2)$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\sin(3x-2)]^2$

$$= 2\sin(3x-2)\frac{d}{dx}[\sin(3x-2)]$$

$$= 2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\frac{d}{dx}(3x-2)$$

$$= 2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\left[3\frac{dx}{dx}-\frac{d}{dx}(2)\right]$$

$$= 3(2)\sin(3x-2)\cos(3x-2)$$

$$= 3\sin 2(3x-2) \because 2\sin A\cos A = \sin 2A$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3\sin(6x-4)$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 61</u> กำหนดให้ $y = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

จะได้ $y' = \frac{d}{dx}\left(x^2\sin x\right) + 2\frac{d}{dx}\left(x\cos x\right) - 2\frac{d}{dx}(\sin x)$

$$= x^2\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 2\left\{x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{dx}{dx}\right\} - 2\cos x$$

$$= x^2\cos x + 2x\sin x - 2x\sin x + 2\cos x - 2\cos x$$

$$\therefore y' = x^2\cos x$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 62</u> กำหนดให้ $h(x) = \sin(\cos x)$ จงหา $h'(x)$

วิธีทำ จาก $h(x) = \sin(\cos x)$

จะได้ $h'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sin(\cos x)\right]$

$$= \cos(\cos x)\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos(\cos x)\left(-\sin x\frac{dx}{dx}\right)$$

$$\therefore h'(x) = -\sin x\cos(\cos x)$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 63</u> กำหนดให้ $y = x\tan x$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = x\tan x$

จะได้ $y' = \frac{d}{dx}\left(x\tan x\right)$

$$= x\frac{d}{dx}\left(\tan x\right) + \tan x\frac{dx}{dx}$$

$$= x\sec^2\frac{dx}{dx} + \tan x(1)$$

$$\therefore y' = xsec^2x + \tan x$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 64</u> กำหนดให้ $y = \frac{\cos x}{x}$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = \frac{\cos x}{x}$

จะได้ $y' = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\cos x}{x}\right]$

$$= \frac{x\dfrac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\dfrac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$= \frac{x(-\sin x)\dfrac{dx}{dx} - \cos x(1)}{x^2}$$

$$\therefore y' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 65</u> กำหนดให้ $y = \text{arc } \sin 3x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \text{arc } \sin 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\text{arc } \sin 3x]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(3x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3\frac{dx}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 66</u> กำหนดให้ $f(x) = \log 4x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \log 4x$ จะได้

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\log 4x]$$

$$= \frac{1}{4x} \cdot \log e \frac{d}{dx}(4x)$$

$$= \frac{4}{4x} \cdot \log e$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log e$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 67</u> กำหนดให้ $f(x) = x \cdot \log x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x \cdot \log x$ จะได้

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x \cdot \log x)$$

$$= x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{dx}{dx}$$

$$= x.\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \log e\frac{dx}{dx} \;\; + \log x(1)$$

$$\therefore f'(x) = \log e + \log x$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 68 กำหนดให้ $y = e^{x^3}$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = e^{x^3}$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{x^3})$$

$$= e^{x^3}\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$\therefore y' = 3x^2e^{x^3}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 69 กำหนดให้ $y = 3^{-x^2}$ จงหาค่า y'

วิธีทำ จาก $y = 3^{-x^2}$ จะได้

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3^{-x^2})$$

$$= 3^{-x^2}\ln 3\frac{d}{dx}(-x^2)$$

$$\therefore y' = -2x(\ln 3)3^{-x^2}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 70 กำหนดให้ $y = \ln 3x^5$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = \ln 3x^5$ จะได้

$$y' = \frac{d}{dx}(\ln 3x^5)$$

$$= \frac{1}{3x^5}\cdot\frac{d}{dx}(3x^5)$$

$$= \frac{1}{3x^5}3\frac{d}{dx}(x^5)$$

$$= \frac{5x^4}{x^5}$$

$$\therefore y' = \frac{5}{x}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 71 กำหนดให้ $y = \ln(\ln\tan x)$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = \ln(\ln\tan x)$ จะได้

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\ln(\ln\tan x)\right]$$

$$= \frac{1}{\ln(\tan x)}\cdot\frac{d}{dx}(\ln\tan x)$$

$$= \frac{1}{\ln(\tan x)} \cdot \frac{1}{\tan x} \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{\tan x \cdot \ln(\tan x)} \cdot \sec^2 x \frac{dx}{dx}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x \cdot \ln(\tan x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sin x \cos x \ln(\tan x)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x \ln(\tan x)} \because \sin A \cos A = \frac{1}{2}\sin 2A$$

$$\therefore y' = \frac{2}{\sin 2x \ln(\tan x)}$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 72</u> กำหนดให้ $y = x\ln x - x$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y = x\ln x - x$

จะได้

$$y' = \frac{d}{dx}(x\ln x) - \frac{dx}{dx}$$

$$= x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{dx}{dx} - 1$$

$$= x\frac{1}{x}\frac{dx}{dx} + \ln x - 1$$

$$\therefore y' = 1 + \ln x - 1 \quad = \ln x$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 73</u> กำหนดให้ $f(x) = (\log x)^3$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (\log x)^3$ จะได้

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\log x)^3$$

$$= 3(\log x)^2 \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= 3(\log x)^2 . \frac{1}{x} . \log e \frac{dx}{dx}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{3}{x}(\log e)(\log x)^2$$ **ตอบ**

<u>ตัวอย่างที่ 74</u> กำหนดให้ $y = e^{-x}\cos x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = e^{-x}\cos x$ จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[e^{-x}\cos x\right]=e^{-x}\frac{d}{dx}(\cos x)+\cos x\frac{d}{dx}(e^{-x})$$

$$=e^{-x}(-\sin x)\frac{dx}{dx}+\cos xe^{-x}\frac{d}{dx}(-x)$$

$$=-e^{-x}\sin x-\cos xe^{-x}$$

$$\therefore y'=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

ตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 75</u> กำหนดให้ $y=\arcsin e^{x}$ จงหา y'

วิธีทำ จาก $y=\arcsin e^{x}$ จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\arcsin e^{x}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(e^{x})^{2}}}\frac{d}{dx}(e^{x})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

ตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 76</u> กำหนดให้ $y=e^{\sin 3x}$ จงหาค่า y'

วิธีทำ จาก $y=e^{\sin 3x}$ จะได้

$$y'=\frac{d}{dx}\left[e^{\sin 3x}\right]$$

$$=e^{\sin 3x}\frac{d}{dx}(\sin 3x)$$

$$=e^{\sin 3x}\cos 3x\frac{d}{dx}(3x)$$

$$\therefore y'=3\cos 3xe^{\sin 3x}$$

ตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 77</u> กำหนดให้ $f(x)=\log(\log x)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x)=\log(\log x)$

จะได้

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\log(\log x)$$

$$=\frac{1}{\log x}.\log e\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$=\frac{1}{\log x}.\log e.\frac{1}{x}\log e\frac{dx}{dx}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{(\log e)^{2}}{x\log x}$$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 78 จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = 4 - x^2$ ที่จุด (-1, 3)

วิธีทำ $\because$ ความชันของเส้นโค้งที่จุดใดๆ คือ อนุพันธ์ของเส้นโค้งที่จุดนั้น

$\therefore$ จาก $y = 4 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4 - x^2)$$

$$= \frac{d4}{dx} - \frac{dx^2}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -2x$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด (-1, 3) คือ $-2(-1) = 3$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 79 จงหาความชันของเส้นโค้ง $x^2 - 4y^2 = 5$ ที่จุด (4, 1)

วิธีทำ $\therefore$ ความชันของเส้นโค้งที่จุดใดๆ คือ อนุพันธ์ของเส้นโค้งที่จุดนั้น

จาก $x^2 + 4y^2 = 5$ หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{d4y^2}{dy} = \frac{d5}{dx}$$

$$2x + 4\left(2y\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$8y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$$

$\therefore$ ความชันของเส้นโค้งที่จุดใดๆ คือ $\frac{-x}{4y}$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด (4, 1) $= \frac{-(4)}{4(1)} = -1$ ***ตอบ***

ตัวอย่างที่ 80 จงเขียนกราฟพร้อมทั้งหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ จาก $y = x^3 - 3x^2 + 4$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 3x^2 + 4\right) = 3x^2 - 6x$$

$$= 3x(x - 2)$$

$\because$ จุดวิกฤต คือ จุดที่ทำให้ $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore$ จุดวิกฤต คือ $3x(x-2) = 0$

$\therefore \quad x = 0, 2$

พิจารณาที่จุด $x = 0$ โดยเลือกช่วง $[-1, 1]$

$\because$ ในช่วง $[-1, 1]$ มี $x = 0$ เป็นจุดวิกฤต เพียงจุดเดียว

จะเห็นว่าเมื่อ $x = 1; \frac{dy}{dx} = 3(-1)^2 - 6(-1) > 0$ เป็นบวก

และ $x = 1; \frac{dy}{dx} = 3(1)^2 - 6(1) < 0$ เป็นลบ

$\therefore$ ค่าความชันเปลี่ยนจากบวกเป็นลบในช่วง $[-1, 1]$ ที่จุด $x = 0$

จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $\therefore f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$

จุดสูงสุดสัมพันธ์ คือ $(0, 4)$ ***ตอบ***

พิจารณาที่จุด $x = 2$ โดยเลือกช่วง $[1, 3]$

เมื่อ $x = 1 ; \frac{dy}{dx} = 3(1)^2 - 6(1) < 0$ เป็นลบ

เมื่อ $x = 3 ; \frac{dy}{dx} = 3(3)^2 - 6(3) > 0$ เป็นบวก

$\therefore$ ค่าความชันเปลี่ยนจากลบเป็นบวกในช่วง $[1, 3]$ ที่จุด $x = 2$

จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $\therefore f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4 = 0$

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(2, 0)$ ***ตอบ***

จาก $y = x^3 - 3x^2 + 4$

ให้ $y = 0$ จะได้ว่า $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

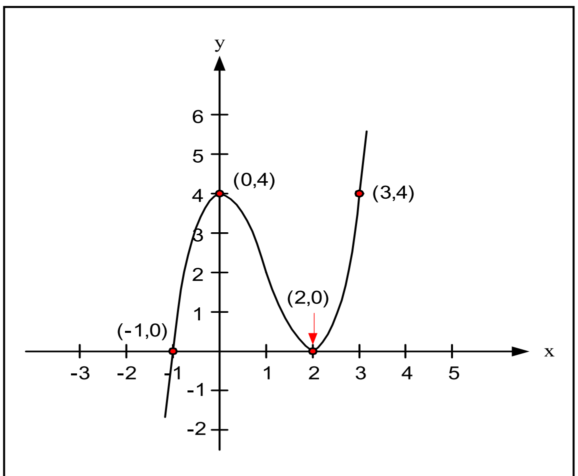
$(x-2)(x-2)(x+1) = 0$

$\therefore \quad x = -1, 2, 2$

จุดตัดแกน x คือ จุด $(-1, 0), (2, 0)$

ให้ $x = 0$ จะได้ $y = 0^3 - 3(0)^2 + 4 = 0$

จุดตัดแกน y คือ $(0, 4)$



หาค่า y เมื่อ $x = 1$

$\therefore \quad y = 1^3 - 3(1)^2 + 4 = 2$

หาค่า y เมื่อ $x = 3$

$\therefore \quad y = 3^3 - 3(3)^2 + 4 = 4$ **ตอบ**